第一册

大青花鱼

目录

第一章　从自然数到有理数 **5**

1.1　分数、整数、有理数 5

1.2　有理数的大小 7

1.3　乘方 9

第二章　从变量到方程（上） **15**

2.1　数和代数 15

2.2　代数式 20

2.3　等式和方程 24

第三章　集合和映射 **25**

3.1　集合 25

3.2　概念和集合 27

3.3　判断和集合 29

3.4　映射 33

第四章 有理数的运算 **37**

4.1 有理数的加减法 37

4.2 有理数的乘除法 40

4.3 数轴 44

第五章 代数式的运算 **45**

5.1 整式的运算 45

5.2 分式的运算 49

第六章 从变量到方程（下） **51**

6.1 一元一次方程 51

6.2 一元一次不等式 53

第一章　从自然数到有理数

1.1　分数、整数、有理数

我们已经学过自然数：$0, 1, 2, 3, \cdots$。自然数是 0 和 1 相加得到的数。从 0 开始，不断加 1，就能得到任何自然数。

比如：$4 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1$。

自然数之间做加法和乘法，得到的还是自然数。

加法和乘法都满足结合律和交换律，乘法对加法有分配律。

自然数是自然产生的。当我们发现两头牛和两天有共同之处时，自然数的概念就诞生了。

为了回答类似“三个人平分七只鸡”的问题，人们发明了除法。**除法是乘法的逆运算**。

比如：$3 \times 7 = 21$，于是 $3 = 21 \div 7$，$7 = 21 \div 3$。

除法产生了分数。自然数可以看作分母是 1 的分数。分数之间可以做加法、乘法和除法，得到的还是分数。

为了回答类似“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的问题，人们发明了减法。**减法是加法的逆运算**。

比如，$3+2=5$，于是 $3=5-2$，$2=5-3$。

既然可以写出 $5-2$，那么可不可以写 $0-2$ 呢？$0-2$ 有什么含义呢？

借用“五个鸡蛋吃了两个还剩几个”的思路，$0-2$ 可以表示“本没有鸡蛋，借鸡蛋来吃了两个还剩几个”。剩下的是“欠两个鸡蛋”，是一种负债状态。因此，这样的数称为**负数**。

我们一般把 $0-2$ 中的 0 去掉，只记为 -2。-2 满足 $-2+2=0$。对某个数，比如 3 来说，$3+(-2)=3+(0-2)=3-2$。也就是说，一个数加上 -2，就和减去 2 一样。以此类推，可以得到：

$$-1,-2,-3,\cdots$$

它们由 $1,2,3,\cdots$ 前加上减号得到，表示 0 减去 $1,2,3,\cdots$ 的结果，读作“负一”、“负二”、“负三”等等。我们把负数带的减号称为**负号**（读作“负”），和一般减法区别开来。

一般来说，在任何分数前加上负号，也可以得到一个负数，表示 0 减去它的结果。

有没有 -0 呢？-0 就是 $0-0$，也就是 0 自己，所以就没有必要加负号了。

自然数和它们的负数合称**整数**。我们把 $-1,-2,-3,\cdots$ 这些负数称为**负整数**，把原来 $1,2,3,\cdots$ 这些数称为**正整数**，和负整数相对。由于 -0 就是 0，约定 0 既不是正数，也不是负数。于是整数分为正整数、负整数和 0。

分数和它们的负数合称**有理数**，我们把带负号的分数称为**负有理数**或**负分数**，把原来的分数（除了 0）称为**正有理数**或**正分数**。正有理数包括正整数，负有理数也包括负整数，有理数包括整数。

自然数或分数前面加负号得到的负数，叫做它的**相反数**。反过来，一个负整数或负分数去掉负号得到的数，也叫做它的相反数。约定 0 的相反数就是 0。于是，每个有理数都有唯一的相反数。

除了 0 以外，相反数总是成对的。比如，3 的相反数是 -3，-3 的相反数就是 3。一个有理数的相反数的相反数，就是它自己。

思考 1.1.1. 一个有理数前面加上负号，一定会得到一个负数吗？

加上一个负数，就和减去它的相反数一样。所以，现实中遇到和加法对应的概念，可以用减法和负数表示相反或相对的概念。比如，如果把“往东走”视作“加”，那么“往西走”就可以视作“减”。“原地往东走三步，再往西走两步”，就可以视作“$0+3-2$”。计算得到 1。它表示最终和原来比，往东走了一步。

1.2 有理数的大小

加法不仅可以表达累加的概念，还可以用于比较大小。比如，5 比 3 大，3 比 5 小。

我们用大于号“$>$”和小于号“$<$”记录大小关系。5 比 3 大就写作 $5>3$，读作“5 大于 3”；3 比 5 小就写作 $3<5$，读作“3 小于 5”。

大小关系有哪些基本性质呢？

首先，大小关系用来形容不相等的数。所有不相等的数都能比大小。两个数如果不相等，那么总有一个比较大，另一个比较小。

大小关系是**互反**的。说一个数比另一个数大，就是说另一个数比它小。反之亦然。

大小关系还是**传递**的，甲数比乙数大（小），乙数比丙数大（小），那么甲数就比丙数大（小）。

5 比 3 大，可以理解为 5 是 3 再加自然数 2 得到的，而 3 却没法通过 5 加上一个自然数得到。一般来说，如果一个数加上某个自然数或分数等于另一个数，那么它比另一个数小，另一个数比它大。

我们希望大小关系对所有的有理数都成立，这样，我们就可以比较任何有理数的大小。首先，任何正有理数都大于 0。负有理数的相反数是分数，而任何负有理数加上它的相反数都得到 0。所以，按照大小关系的定义，我们规定 0 大于任何负有理数。于是任何正有理数大于 0，从而大于任何负有理数。

我们约定大于 0 的数叫做**正数**，小于 0 的数叫做**负数**。正整数、正有理数都是正数，负整数、负有理数都是负数。这样的约定和前面负数的定义是一致的。之前的结论可以这么说：**任何正数大于任何负数**。

负有理数之间如何比较大小呢？举例来说，$0=-3+3=-3+1+2$，所以 $-3+1=0-2=-2$。-2 由 -3 加上自然数 1 得到，所以 -3 小于 -2。进一步分析，我们发现，自然数 1 来源于"3 可以写成 $2+1$"。所以我们可以总结出两个负有理数比较大小的方法：看它们的相反数。相反数中较大的，可以写成较小数加上一个分数，于是，相反数较大的负有理数加上这个分数，就等于相反数较小的负有理数。因此，**相反数较大的负有理数比较小，相反数较小的负有理数比较大**。

正数和负数可以比较大小。所以，现实问题中涉及到相反或相对的概念比较大小时，可以用有理数表示。

比如，今天延安的气温是 3.4 摄氏度，长春的气温是 -8.2 摄氏度，哈尔滨的气温是 -15.1 摄氏度，那么延安气温最高，长春气温比延安低，而哈尔滨气温又比长春低。

思考 1.2.1.

1. 用自己的话总结：我们是怎样定义负数的大小关系的？

2. 怎么评价这样定义的大小关系？

1.3 乘方

乘法可以更方便地表示若干个相同的数相加。比如，我们用 3×4 表示 $3+3+3+3$。那么，能不能方便地表示若干个相同的数相乘呢?

我们把 3×3 称为 3 乘 2 **次方**，把 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 称为 7 乘 5 次方。

同一个数连乘几次，叫做它乘几次方。连乘的结果，叫做它的几**次方**或几**次幂**。这种运算叫做**乘方**或**乘幂**。

我们把 7 的 5 次方记作 7^5，把 7 称为**底数**，把 5 称为**指数**。这样记法，比 $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ 更方便。

一个数的 1 次方就是它自己。一个数的 2 次方也叫做它的**平方**。一个数的 3 次方也叫做它的**立方**。

约定任何数的 0 次方是 1。

$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7)$。用乘方表示这个关系，就是: $7^5 = 7^3 \times 7^2$。注意到 $5 = 3 + 2$。用日常的话来说，5 个 7 相乘，等于 3 个 7 相乘，再和 2 个 7 相乘。

同底数乘方的积，是指数之和的乘方。乘方的乘法，可以转化为指数的加法。因此，乘方的除法，也可以转化为指数的减法。

比如，$7^3 \times 7^2 = 7^{3+2} = 7^5$，所以，

$$7^{5-2} = 7^3 = 7^5 \div 7^2.$$

同底数乘方的商，是指数之差的乘方。

既然乘方的乘除可以转化为指数的加减，那么是否有负指数? 能否定义一个数的负数次方?

如果定义 7^{-3} 为: $7^{-3} \times 7^3 = 7^0 = 1$，那么 $7^{(-3)}$ 就等于 $\frac{1}{7^3}$。一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。

显然，0 没有负数次方。

再来看乘方的乘方。考虑 $\left(2^3\right)^4$。按照定义，这表示把 2^3 连乘 4 次。而 2^3 本身表示把 2 连乘 3 次。把它写出来，就是:

$$\begin{aligned}\left(2^3\right)^4 &= \left(2^3\right)\times\left(2^3\right)\times\left(2^3\right)\times\left(2^3\right)\\ &= 2^{3+3+3+3}\\ &= 2^{4\times 3} = 2^{12} = 4096.\end{aligned}$$

乘方的乘方，就是乘方的连乘积；而乘方的乘法就是指数的加法，所以乘方的连乘就是把指数重复相加，也就是对指数做乘法。因此，一般来说，乘方的乘方，就是乘方的指数的积。

例题 1.3.1. 计算:

1. $2^5 \times 2^2 \times 2^{-3}$
2. $3^4 \times \left(3^2\right)^3$

解答.

1. 按照规则，

$$\begin{aligned}2^5 \times 2^2 \times 2^{-3} &= 2^{5+2-3}\\ &= 2^4 = 16.\end{aligned}$$

2. 按照规则，

$$\begin{aligned}3^4 \times \left(3^2\right)^3 &= 3^4 \times 3^{3\times 2}\\ &= 3^{4+3\times 2}\\ &= 3^10 = 59049.\end{aligned}$$

最后来看底数的运算对乘方的影响。比如，如何计算 $(7\times 5)^3$? 按照定

义，$(7\times5)^3$ 就是把 7×5 连乘 3 次。将它写出来，可以发现：

$$\begin{aligned}(7\times5)^3&=(7\times5)\times(7\times5)\times(7\times5)\\&=(7\times7\times7)\times(5\times5\times5)\\&=7^3\times5^3.\end{aligned}$$

一般来说，底数的积的乘方，是乘方的积。

要注意的是：$(7\times5)^3$ 和 $7\times(5^3)$ 是不一样的。那么，可不可以写 7×5^3 呢？

我们约定，**乘方运算比乘法优先**。也就是说，7×5^3 表示 $7\times(5^3)$，而不是 $(7\times5)^3$。

乘方的底数相乘，可以转换为乘方相乘。那么底数相除，如何计算呢？让我们考虑一个简单的例子：$\left(\frac{7}{5}\right)^3$。按照定义，$\left(\frac{7}{5}\right)^3$ 就是把 $\frac{7}{5}$ 连乘 3 次。将它写出来，可以发现：

$$\begin{aligned}\left(\frac{7}{5}\right)^3&=\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\times\frac{7}{5}\\&=\frac{7\times7\times7}{5\times5\times5}\\&=\frac{7^3}{5^3}.\end{aligned}$$

一般来说，底数的商的乘方，是乘方的商。

和底数的乘积一样，要注意：$\left(\frac{7}{5}\right)^3$ 和 $\frac{7^3}{5}$ 是不一样的。我们约定，**乘方运算比除法优先**。也就是说，$\frac{7}{5}^3$ 表示 $\frac{7^3}{5}$，而不是 $\left(\frac{7}{5}\right)^3$。$7\div5^3$ 表示 $7\div(5^3)$，而不是 $(7\div5)^3$。

例题 1.3.2. 计算：

1. $3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^4$
2. $\left(\frac{6}{5}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^3$
3. $\left(\frac{2}{15}\right)^3\times\left(\frac{35}{4}\right)^2$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\times\left(\frac{7}{2}\right)^3$

解答.

1. 按照规则,

$$\begin{aligned} 3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 &= 3^3 \times \frac{1^4}{3^4} \\ &= \frac{\cancel{3^3}}{3^{\cancel{4}1}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

从这个例子可以看到,$\frac{1}{3}$ 的 4 次方就是 1^4 除以 3^4 的商,而 1^4 就是 1,所以,3 的倒数的 4 次方就是 3 的 4 次方的倒数,也就是它的 -4 次方。

一般来说,非零的数,**倒数的乘方就是乘方的倒数**。或者说,取倒数的乘方,就是取指数为相反数的乘方。

2. 按照规则,

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{5}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 &= \frac{6^3}{5^3} \times \frac{5^3}{6^3} \\ &= \frac{\cancel{6^3} \times \cancel{5^3}}{\cancel{5^3} \times \cancel{6^3}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

从这个例子可以看到,如果两个乘方的底数互为倒数,指数相同,那么它们的乘积等于 1。再次验证了:倒数的乘方就是乘方的倒数。

我们也可以换个角度理解:$\frac{6}{5}$ 的倒数的 3 次方,就是它的 -3 次方。因此,我们要计算的是 $\frac{6}{5}$ 的 3 次方乘以它的 -3 次方,即它的 $3-3=0$ 次方。因此结果是 1。

3. 按照规则，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{2}{15}\right)^3 \times \left(\frac{35}{4}\right)^2 &= \frac{2^3}{15^3} \times \frac{35^2}{4^2} \\
&= \frac{2^3 \times 35^2}{15^3 \times 4^2} \\
&= \frac{2^3 \times (5 \times 7)^2}{(3 \times 5)^3 \times (2^2)^2} \\
&= \frac{2^3 \times 5^2 \times 7^2}{3^3 \times 5^3 \times 2^{2\times 2}} \\
&= \frac{\cancel{2^3} \times \cancel{5^2} \times 7^2}{3^3 \times 5^{\cancel{3}1} \times 2^{\cancel{4}1}} \\
&= \frac{7^2}{3^3 \times 5 \times 2} \\
&= \frac{49}{90}.
\end{aligned}
$$

4. 按照规则，

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{5^3}{2^3} \\
&= \frac{4^2}{3^2} \times \frac{5^3}{2^3} \\
&= \frac{(2^2)^2 \times 5^3}{3^2 \times 2^3} \\
&= \frac{2^{2\times 2} \times 5^3}{3^2 \times 2^3} \\
&= \frac{2^{\cancel{4}1} \times 5^3}{3^2 \times \cancel{2^3}} \\
&= \frac{2 \times 5^3}{3^2 \times 2} \\
&= \frac{250}{18}.
\end{aligned}
$$

综上所述，我们总结出乘方的运算法则：

1. 一个数的几次方，就是把它连续乘几次。
2. 任何数的 0 次方是 1。
3. 一个数的负几次方，就是 1 除以它的几次方。
4. 两个同底数乘方的积，是该底数的乘方，指数是两者指数的和。
5. 两个同底数乘方的商，是该底数的乘方，指数是两者指数的差。
6. 乘方的乘方，是同底数的乘方，指数是两次乘方的指数的积。
7. 底数的积的乘方，是乘方的积。
8. 底数的商的乘方，是乘方的商。

思考 1.3.1.

1. 约定任何数的 0 次方是 1，有什么好处?

2. 计算乘方的乘方，和乘法的结合律，有什么相似之处？为什么?

3. 计算底数乘除法的乘方，和乘法对加减法的分配律，有什么相似之处？为什么?

4. 为什么要约定乘方运算比乘除法优先?

5. 为什么说一个数的倒数就是它的 -1 次方?

6. 乘方中，指数的倒数，代表什么，是否有意义？指数的除法，代表什么，是否有意义?

7. 是否有关于两数之和的乘方的运算方法?

第二章　从变量到方程（上）

2.1　数和代数

讨论数的性质时，我们常常发现，总结一些普遍的规律，需要用很多话来说清楚。比如：

例子 2.1.1.

$4 = 3 + 1$, $4^2 - 3^2 = 4 + 3$.
$5 = 4 + 1$, $5^2 - 4^2 = 5 + 4$.

$(2 \times 4 + 1)^2 = 8 \times 10 + 1$.
$(2 \times 5 + 1)^2 = 8 \times 15 + 1$.

我们想总结两个对所有数都适用的规律，但只举了几个例子。这种方法不好。

有没有更好的方法呢？

对于第一个规律，我们可以说：如果天元比地元大 1，那么天元的平方减去地元的平方等于天元加地元。对于第二个规律，我们可以说，每个自然数两倍加 1 的平方除以 8 余 1。

我们用“天元”、“地元”、“每个自然数”代替了具体的 4 和 5，以说明这是更普遍的规律，而不是只对 4 和 5 成立的等式。这种思想叫做**代数**的

思想。代数可以让我们暂时忽略具体的数，把重点放在数与数之间的关系上。我们能轻松看出这些关系是普遍的，不依赖特定的数。我们把这样的关系叫做**代数关系**。

为了和数区别，“天元”、“地元”、“每个自然数”等称为**量**。量是对可以运算的概念的称呼。量可以有现实意义，比如物理学里会讨论物理量，也可以没有现实意义，比如数学中代替数的量可以称为数量。

在讨论问题的时候，如果我们认为一个量代替的数不会变化，就说这个量是**常量**；如果会变化，就说它是**变量**。

我们可以用变量描述上面两个规律：

$$\text{如果天} = \text{地} + 1,\ \text{那么天}^2 - \text{地}^2 = \text{天} + \text{地}.$$

$$(2 \times \text{甲} + 1)^2\ \text{除以}\ 8\ \text{余}\ 1.$$

为了方便，我们一般用字母命名的变量来指代数。

$$\text{如果}a = b + 1,\ \text{那么}a^2 - b^2 = a + b.$$

$$(2 \times x + 1)^2\text{除以8余1}.$$

其中变量 a, b, x 可以变成 $3, 4, 5$ 或任何一个自然数。

用变量代替数，可以用简明的语言表示更复杂、更普遍的规律。

例题 2.1.1. 用代数的方法，说明加法的结合律。

解答. 用文字表示加法的结合律：任意三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变。

考虑任意三个数，记这三个数为 a、b、c，那么：

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

也就是说，加法的结合律可以写成：

$$\text{对任意三个数}\,a,\ b,\ c,\ \ (a + b) + c = a + (b + c).$$

例题 2.1.2. 用代数的方法，证明：

1. 先减一个数后加另一个数，等于先加另一个数后减这个数。
2. 减去两个数的差，等于先减被减数，再加上减数。

解答.

1. 把被减数记作 a，先减的数记作 b，后加的另一个数记作 c。我们要证明：

$$a - b + c = a + c - b.$$

设 $a + c - b$ 的结果为 d，则按照减法的定义：

$$a + c = d + b = b + d.$$

因此，

$$c = b + d - a.$$

代入 $a - b + c$，得到：

$$\begin{aligned} a - b + c &= a - b + b + d - a \\ &= a + d - a = d + a - a \qquad \text{(加法交换律)} \\ &= d = a + c - b. \end{aligned}$$

2. 把减去的两个数分别记作 b 和 c，被 $b - c$ 的差减的数记为 a。我们要证明：

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

设 $a - (b - c)$ 的结果为 d，则按照减法的定义：

$$a = d + (b - c).$$

根据加法交换律和前面的结论，

$$d + (b - c) = (b - c) + d = b - c + d = b + d - c.$$

所以，

$$a + c = b + d.$$

因此，根据加法交换律和前面的结论，

$$\begin{aligned} a + c &= d + b \\ d &= a + c - b = a - b + c. \end{aligned}$$

即

$$a - (b - c) = d = a - b + c.$$

例题 2.1.3. 用代数的方法，说明同底数乘方的乘除法。

解答. 设底数为 a，考虑两个乘方：a^m 和 a^n，其中正整数 m, n 是乘方的指数。它们的乘积可以这样计算：

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

这是因为按照乘方的定义，a^m 和 a^n 分别是 m 个 a 和 n 个 a 连乘的结果，因此，两者的乘积就是：

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{个}a} \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{个}a} \\ &= \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m+n\text{个}a} \\ &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

任何数 a 的 0 次方是 1。如果 $n = 0$，那么 $a^n = 1$，于是

$$a^m \times a^n = a^m \times 1 = a^m = a^{m+n}.$$

$m = 0$ 时也是如此。因此：

$$\text{对任意自然数}\, m,\, n,\ \ a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

乘方的除法就是乘法的逆运算。$a^m \times a^n = a^{m+n}$，因此，当 $m \geqslant n$ 的时候，

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

我们把这个定义扩展到任意自然数 m, n，也就是说，只要不出现 0 的负数次方，那么

$$\text{对任意自然数}\, m,\, n,\ \ a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

因此，只要不出现 0 的负数次方，那么

$$\text{对任意整数}\, m,\, n,\ \ a^m \times a^n = a^{m+n},\ \ a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

思考 2.1.1.

1. 用代数的方法，说一说怎样比较两个负有理数的大小。

2. 用代数的方法，说明乘方的运算法则：

只要不出现除以 0 的情况[①]，那么：

(1). 对任何数 a 和任何正整数 m，

$$a^m = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m\text{个}a}.$$

(2). 对任何数 a，$a^0 = 1$。

(3). 对任何数 a 和任何自然数 m，$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$。

(4). 对任何数 a 和任何整数 m, n，$a^m \times a^n = a^{m+n}$。

(5). 对任何数 a 和任何整数 m, n，$a^m \div a^n = a^{m-n}$。

(6). 对任何数 a 和任何整数 m, n，$(a^m)^n = a^{m \times n}$。

(7). 对任何数 a, b 和任何整数 m，$(a \times b)^m = a^m \times b^m$。

(8). 对任何数 a, b 和任何整数 m，$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$。

3. 用代数的方法，描述加法结合律、加法交换律、乘法结合律、乘法交换律和分配律。

4. 用代数的方法证明：

4.1. 先除以一个数后乘以另一个数，等于先乘以另一个数后除以这个

[①] 0 的负数次方实际上就是除以 0。

数。

4.2. 除以两个数的商，等于先除以被除数，再乘以除数。

2.2 代数式

含有变量的算式叫做**代数式**。为了区别，我们把只有数的算式叫做**数式**。

$a+2$，$1.84\times x^2-3$，$\frac{2\times x^3-1}{a^n+1}$，$0.79\times j^2-\frac{h+1}{n}+5$ 等等都是代数式。

数式既表示计算过程，也表示计算的结果：一个数。把数式中的数用变量代替，我们不再计算结果，只关心计算过程本身。这对我们找出并解释计算过程中的规律很有帮助。掌握了计算的规律后，我们再用具体的数代替变量（称为**赋值**或**代入**），就能更快更好地算出结果。

乘号 $\times$ 和 x 或 X 很像，为了避免混淆，一般省略乘号，或用 $\cdot$ 代替乘号。$1.84\times x-3$ 可以写成 $1.84x-3$ 或 $1.84\cdot x-3$

代数式中不同的变量称为**元**。只与一个变量有关的式子叫做**一元式**，和多个变量有关的式子叫做**多元式**。

变量和数通过四则运算得到的代数式，叫做**有理式**。变量和数通过加法、减法和乘法得到的代数式，叫做**整式**。如果除法中涉及了变量，就叫**分式**。有理式中除了整式，就是分式。

例子 2.2.1.

整式：$x^3+5x-3.32$，$a+b^2-2C$，$(b-4)^9$.

分式：$\frac{1-0.9r+v^2}{3B-k}$，$n^2-7+\frac{0.88}{(H-6)^3}$, $t-(t+0.382g)^{-3}$.

我们知道，数的乘法比加减法优先。比如，计算 $4+3\times 6$ 时，我们要

先计算 $3 \times 6 = 18$，再计算 $4 + 18 = 22$。先计算加法是不对的。代数式特别是整式中，我们也更关心乘法。我们把变量和数相乘的部分称为**项**。举例来说，$0.54xba$，$-1.24 \cdot gb \cdot 1.19 \cdot g^2$，$u \cdot 98K$ 分别是一项，$10b - V$ 是两项的差。

项是变量和数的乘积。变量之间不一定能运算，但数与数之间可以运算。我们可以把一项中所有的数相乘，放在最前面，叫做项的**系数**。其次，一项之中，同一个变量多次相乘，可以放在一起，作为连乘，用乘方表示。这样把项变得更简洁的过程，叫做**化简**。

比如，考虑代数式 $x \cdot 3 \cdot y \cdot 2 \cdot x$。它只有一项。这一项中，可以先把所有的数相乘，得到 6，放在前面。然后找出相同的变量多次相乘的情况。这里 x 乘了两次，因此可以写成 x^2。整理后我们得到 $6x^2y$。这就是化简的结果。

代数式某一项化简后，总是一个数乘以若干个变量的乘幂。

要注意的是，项的某个变量前有负号，说明它是 -1 乘以这个变量的结果。这时要把 -1 计到系数里面。比如，化简 $x \cdot 2 \cdot (-y) \cdot 3 \cdot x$ 时，系数为 $-1 \cdot 2 \cdot 3 = -6$，化简结果为：$-6x^2y$。

如果两项变量部分相同，只有系数不同，就说它们是**同类项**。同类项的一项就是另一项乘以某个（不是零的）数。

同类项的变量部分相同，系数不同。因此，根据乘法分配律，可以合并，规则是把系数相加。比如，代数式 $3.52x^2y + 0.19x^2y$ 由两项组成，而 $3.52x^2y$ 和 $0.19x^2y$ 可以合并，得到 $3.71x^2y$。**合并同类项**也是代数式化简的一部分。

例题 2.2.1. 对以下代数式合并同类项：

1. $3x^2y - y^2 2x + 1 + yx^2 - 6y \cdot (xy + 4)$
2. $aha - 5a(h + ah) + 4ha^2 + hab$
3. $\frac{a+2b}{a-b} + \frac{2a^2-b}{(a-b)(a+b)}$

解答.

1. 首先用乘法分配律将每一项展开出来，

$$
\begin{aligned}
& 3x^2y - y^2 2x + 1 + yx^2 - 6y \cdot (xy + 4) \\
= & 3x^2y - y^2 2x + 1 + yx^2 - 6yxy + 6y \cdot 4.
\end{aligned}
$$

然后按同一顺序把每项的字母排好，最左边是系数，然后按字母表顺序排列。比如：$y^2 2x$ 改写为 $2xy^2$。这样，我们就能方便地找出同类项，然后合并。

$$
\begin{aligned}
& 3x^2y - y^2 2x + 1 + yx^2 - 6yxy + 6y \cdot 4 \\
= & 3x^2y - 2xy^2 + 1 + x^2y - 6xy^2 + 24y \\
= & (3x^2y + x^2y) + (-2xy^2 - 6xy^2) + 24y + 1 \\
= & 4x^2y - 8xy^2 + 24y + 1
\end{aligned}
$$

2. 同上，

$$
\begin{aligned}
& aha - 5a(h + ah) + 4ha^2 + hab \\
= & a^2h - 5ah - 5a^2h + 4a^2h + abh \\
= & (a^2h - 5a^2h + 4a^2h) - 5ah + abh \\
= & 0a^2h - 5ah + abh \\
= & -5ah + abh
\end{aligned}
$$

这里几个 a^2h 相关的同类项合并之后系数为 0，这说明几个同类项相互抵消了。同类项抵消是代数式化简的主要原因。

3. 分式的化简需要考虑分子和分母。为了方便，通常会先进行通分，然后

对分子做合并同类项，最后约分。

$$\begin{aligned}
&\frac{a+2b}{a-b}+\frac{2a^2-b}{(a-b)(a+b)}\\
=&\frac{(a+2b)(a+b)+2a^2-b}{(a-b)(a+b)}\\
=&\frac{a^2+2ba+ab+2b^2+2a^2-b}{(a-b)(a+b)}\\
=&\frac{(a^2+2a^2)+(2ab+ab)+2b^2-b}{(a-b)(a+b)}\\
=&\frac{3a^2+3ab+2b^2-b}{(a-b)(a+b)}
\end{aligned}$$

一项中所有变量的指数的和，叫做它的**次数**。比如 $3.71x^2y$ 的次数是 3，它可以叫 3 次项。不含变量部分的项叫**常数项**。我们约定，常数项次数为 0。

整式是变量和数通过加减法和乘法得到的代数式。由于乘法优先计算，可以认为整式是一些项做加减法得到的。合并同类项后，如果只剩下一项，就说它是**单项式**。一般来说剩下不止一项，称为**多项式**。多项式的每一项都是单项式。多项式次数最高的项叫做**最高次项**。最高次项的次数就叫多项式的**次数**。如果多项式每一项的次数都相等，就称它为**齐次多项式**。

习题 2.2.1.

1. 合并同类项：

- $3+9x^3+5x-7x^3-3.32-1.05x$
- $ab^2+(c-b)a^2-ba(b-c)+c(b+a)c+(a-c)b(c+a)-(b+c)bc.$

2. 判断是否是齐次多项式：

- $\frac{(a+b)^3}{a-b}$
- a^4-bx^3
- $a^4b^4\left(\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{a}\right)^4$

2.3　等式和方程

等式就是把两个式子或多个式子用等号连起来。**不等式**就是把两个式子或多个式子用不等号连起来。一般情况，默认是两个式子。

等式可以是真的，也可以是假的。前者也叫等式成立，后者也叫等式不成立。同样，我们也说不等式成立（或不成立）。

按大小关系，**不等号**分为两类：大于类和小于类。按是否包含相等关系，不等号分为两类：严格类和可等于类。一共有四个不等号：“$<$”（严格小于），“$\leqslant$”（小于等于），“$>$”（严格大于），“$\geqslant$”（大于等于）。

等式的基本性质：两边同时加、减、乘、除同一个量，成立的等式仍然成立。

为了解决生活中的问题，我们学过简单的方程。把未知的数，用变量表示。问题中的相等关系，就变成了含变量的等式，称为**方程**。解决这个问题，求出使得等式成立的变量值，称为**解方程**，这时变量的值称为**方程的解**。

如果问题中的条件是不等关系，我们就得到了含变量的**不等式**。解决这个问题，求出使得不等式成立的变量值，称为**解不等式**。变量的值称为**不等式的解**。

习题 2.3.1. 以下哪些是等式？哪些是不等式？哪些是方程？

$$\begin{array}{lll} (1).\ 3x+1=4, & (2).\ 6=4, & (3).\ a=b=c+1 \\ (4).\ v\leqslant 4r^2-v, & (5).\ 2>3, & (6).\ h\geqslant f>g-f \end{array}$$

第三章　集合和映射

3.1　集合

我们用集合表示一类事物。把不同性质的事物聚集在一起，合起来考虑，就是**集合**，简称**集**。构成集合的事物称为集合的**元素**。

- 集合的元素互不相同。
- 集合的元素没有顺序。
- 集合的元素是确定的：一个事物要么属于该集合，要么不属于。

某个事物 a 属于集合 A，记作 $a \in A$。某个事物 a 不属于集合 A，记作 $a \notin A$。

例子 3.1.1.

可以在大括号中列出集合的元素，比如：$\{1, 2, 3\}$ 是一个集合。重复列出的元素视为同一个，比如：$\{1, 2, 2, 3\}$ 也是集合，它和 $\{1, 2, 3\}$ 是一样的。

也可以在大括号中用条件描述集合。集合的元素是满足条件的元素，比如：$\{a \,|\, a\text{是偶数}\}$。竖线左边是元素的样子，右边是它满足的条件。

还可以直接用文字描述集合，比如：{一年的十二个月份} 是一个集合。

除了以上方式，也可以用示意图、图表、列表等方式表示集合。

没有元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$。

自然数、整数、分数、有理数都是集合。自然数一般简记为 $\mathbb{N}$，分数一

般简记为 $\mathbb{F}$，整数一般简记为 $\mathbb{Z}$，有理数一般简记为 $\mathbb{Q}$。“a 是自然数”可以记为 $a \in \mathbb{N}$。

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，就说 A 是 B 的**子集**，或者说 A 包含于 B，记为 $A \subseteq B$，B 是 A 的**母集**，或者说 A 包含 B，记为 $B \supseteq A$。如果两者不相同，就说 A 是 B 的**真子集**，记为 $A \subset B$，B 是 A 的**真母集**，记为 $B \supset A$。

集合也可以做“减法”。从集合 A 中去掉属于 B 的元素，只剩下不属于 B 的元素。这些元素也构成一个集合，称为 B 在 A 中的**差集**，记为 $A \setminus B$。讨论问题的时候，我们可能会默认某个集合是问题涉及的所有事物的集合，其他集合都是它的子集。这样的集合一般称为**全集**。全集存在的时候，集合 A 作为全集的子集，在全集中的差集，可以简称为 A 的**补集**，记为 $\bar{A}$ 或 $A^{\square}$。

例子 3.1.2.

1. 集合 $\{1, 2\}$ 是集合 $\{1, 2, 3\}$ 的真子集，集合 $\{1, 2, 3\}$ 是集合 $\{1, 2\}$ 的真母集：$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$，$\{1, 2, 3\} \supset \{1, 2\}$。
2. 任何集合 S 总是空集 $\varnothing$ 的母集：$\varnothing \subseteq S$。
3. $\{1, 2\}$ 在集合 $\{1, 2, 3\}$ 中的补集是 $\{3\}$。$\{3\}$ 在集合 $\{1, 2, 3\}$ 中的补集是 $\{1, 2\}$。

自然数集、整数集、分数集和有理数集有以下关系：

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{F} \subset \mathbb{Q}$$

以上每个集合中的正数与负数，构成它的子集，一般用上标 $+$ 和 $-$ 标示。比如，$\mathbb{Z}^{+}$ 就表示正整数集合，$\mathbb{Q}^{-}$ 就表示负有理数集合。

考虑若干个集合。由属于其中至少一个集合的元素构成的集合，称为这些集合的**并集**；由属于所有集合的元素构成的集合，称为这些集合的**交集**。两个集合 A, B 的并集记为 $A \cup B$，交集记为 $A \cap B$。

几个集合交集为空集，就说它们**不相交**，否则就说它们相交。几个集合中任取两个，都不相交，就说它们两两不相交。如果集合 A 的一些子集两两不相交，而且它们的并集是 A，就说这些集合是 A 的**分划**。

例子 3.1.3.

1. 集合 $\{1,2\}$ 和 $\{2,3\}$ 的并集是集合 $\{1,2,3\}$，$\{1,2\}$ 和 $\{2,3\}$ 的交集是 $\{2\}$。

2. 集合 $A=\{1,2\}$、$B=\{3,4\}$、$C=\{5,6\}$ 两两不相交。它们的并集是 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$。A,B,C 是 S 的分划。

3. 集合 $\{1,2,3\}$、$\{3,4,5\}$、$\{1,5,6\}$ 两两的交集都不是空集，但它们的交集为空集。它们不相交，但不是两两不相交。

习题 3.1.1. 验证集合满足以下性质:

- $A\cup B=B\cup A$
- $A\cap B=B\cap A$
- $A\cup A=A\cap A=A$
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- $A\cap\varnothing=\varnothing$
- 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\cap B=A$，$A\cup B=B$
- $(A\cap B)\cup(A\cap C)=A\cap(B\cup C)$
- $(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$

3.2 概念和集合

概念和集合有密切的关系。下面让我们从集合的角度，重新理解“概念”。一个概念的范围，其实就是一个集合。而概念的含义，就是用来描述这个集合的语言形式。

比如，“五行”这个概念的范围，就是“金、木、水、火、土”。所以，

我们考虑“五行”这个概念，其实就是考虑集合 $\{金, 木, 水, 火, 土\}$。又比如，“自然数”这个概念的范围，也就是一个个具体的自然数。所以“自然数”这个概念就对应自然数的集合。

考虑“偶数”这个概念，我们可以定义“偶数就是能被 2 整除的数”，所以，作为集合的“偶数”，就可以写成：

$$\{x \mid x能被2整除\}.$$

这说明，概念的定义就是描述它对应的集合的语言。概念的特性，就是集合的元素需要满足的条件。

再来看概念的关系。概念的关系有：等同关系，从属和包含关系，交叉关系，互斥关系和矛盾关系。

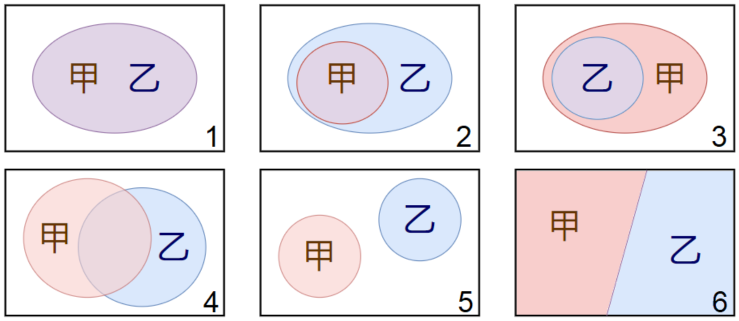
设有甲、乙两概念，分别对应集合 A、B。

- 甲、乙两个概念等同，就是说 $A = B$，两个集合完全相同。
- 概念甲从属于乙，就是说 A 是 B 的子集。同理，甲包含乙，就是说 A 是 B 的母集。
- 甲、乙交叉，表示 A、B 不相同，且 A、B 的交集不是空集。
- 甲、乙互斥，就是说 A、B 的交集是空集，两个集合不相交。
- 甲、乙（关于两者都从属的概念丙）矛盾，就表示 A、B 不相交，而且是丙对应的集合 C 的分划。A 关于 C 的补集是 B，B 关于 C 的补集是 A。

为了更好理解，我们可以用**叠圈图**直观理解集合的关系。

如下图，每个圈表示一个集合[①]，圈内的区域表示属于该集合的元素，圈外的区域表示不属于该集合的元素，也就是该集合（关于全集的）补集。两个圈重叠的部分就表示同时属于两者的元素的集合，也就是两个集合的交集。而两个圈各自的部分加上重叠的部分，就是至少属于其中之一的元素的集合，也就是两个集合的并集。

[①]也可以用其他形状的区域。



1. 等同关系，2. 从属关系，3. 包含关系，
4. 交叉关系，5. 互斥关系，6. 矛盾关系。

叠圈图可以让我们直接看到集合之间的关系。可以看到，用集合来解释概念，方便得多。

习题 3.2.1.

1. 请用集合解释概念的属加种差定义方法。

2. 用叠圈图表示“偶数”、“3 的倍数”、“自然数”之间的关系。

3. 三个集合 A, B, C 都是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的子集，它们都不是空集，而且构成集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的分划。

3.1. 请写出一个符合条件的 A, B, C 的例子。

3.2. 符合条件的 A, B, C 一共有几种?

3.3 判断和集合

理解了概念和集合的关系，我们可以用集合的概念来重新看待判断和命题。

简单的性质判断，只涉及一个概念和一个性质。在对应的命题里，概念是主语，性质是谓语。我们把主语的概念记为 A，把谓语的性质记为 b，那

么简单的性质判断可以写成：

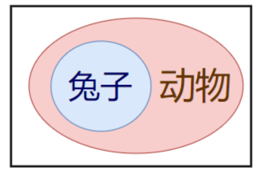
$$A\text{ 是 }b.$$

如果把 a 看成集合，把用 B 表示所有具有性质 b 的东西的集合。那么，性质判断“A 是 b”就是说：

$$A \subseteq B$$

所以，简单的性质判断，就是描述概念的从属关系，也就是集合的子集关系。判断为真，就是说 $A \subseteq B$ 成立；判断为假，就是说 $A \subseteq B$ 不成立。

如果判断的概念 A 是单独概念，那么它对应的子集只有一个元素。我们把这种只含有一个元素的集合称为**单元集**。



如果把 A 的元素记为 a，那么 $A = \{a\}$。$\{a\} \subseteq B$ 命题：兔子是动物。实际上就是说 $a \in B$。

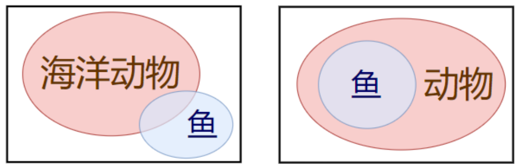
也就是说，判断的概念 A 是单独概念时，我们实际在判断概念是否属于有某个性质的集合。

我们可以给判断的概念 A 加上全称和有称，比如“所有 A 都是 b”。“所有”的意思是，概念 A 的范围里所有的元素，都是 b。于是，“所有”其实只是再次强调了子集关系。

在数学语言里，我们引进表示全称的符号：$\forall$。它读作“任一”、“任何”、“每个”。全命题：“所有 A 都是 b”可以记作“$\forall x \in A$，$x \in B$”。它的意思是“A 中任一元素都是 B 的元素”。也就是说，A 是 B 的子集。

如果我们说“有些 A 是 b”，我们要表达的意思是，A 的元素里，有些元素是 b。这些元素构成 A 的子集，但不一定是 A。所以，有命题其实表示 A 和 B 相交，交集不是空集。

在数学语言里，我们引进表示有称的符号：$\exists$。它读作“存在”，“有”，“至少有一个”。有命题“有些 A 是 b”可以记作“$\exists x \in A$，$x \in B$”。它的意思是“A 中至少有一元素是 B 的元素”。也就是说，A 和 B 的交集不是空集。



左：有些鱼是海洋动物，右：所有的鱼都是动物。

举例来说，“所有偶数都是自然数”可以写作“$\forall x \in$ {偶数}，$x \in$ {自然数}”，换句话说，偶数集是自然数集的子集。“有些偶数是 3 的倍数”可以写作“$\exists x \in$ {偶数}，$x \in$ {3的倍数}”，换句话说，偶数集和 3 的倍数的集合相交，交集不是空集。

例题 3.3.1. 用代数的方法，表示加法和乘法的交换律、结合律。

解答. 加法的交换律：任意两个数相加，交换次序，和不变。把两个数用 a、b 表示，加法交换律可以表示成：

$$\forall\ a, b, \quad a + b = b + a.$$

加法的结合律：任意三个数相加，先把前两个数相加，或者先把后两个数相加，和不变。把三个数用 a、b、c 表示，加法结合律可以表示成：

$$\forall\ a, b, c, \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

乘法的交换律：任意两个数相乘，交换次序，积不变。把两个数用 a、b 表示，乘法交换律可以表示成：

$$\forall\ a, b, \quad a \times b = b \times a.$$

乘法的结合律：任意三个数相乘，先把前两个数相乘，或者先把后两个数相乘，积不变。把三个数用 a、b、c 表示，乘法结合律可以表示成：

$$\forall\ a, b, c, \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

复合判断，也可以用集合的方式表达。

联言判断是多个判断的全判断。考虑这样的联言判断：A 不仅是 b，也是 c。它表达的意思是，A 不仅包含于性质 b 对应的集合 B，也包含于性质 c 对应的集合 C。A 的元素同时在 B、C 中。换句话说，A 是 B、C 的交集的子集。

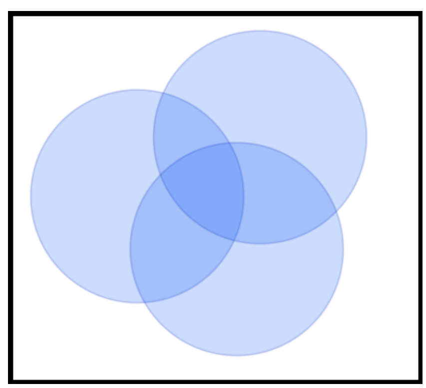
一般来说，考虑关于概念 A 的联言判断，它表达的是 A 包含于多个性质对应的集合的交集。如果把这些性质的集合记为 I，把每个性质对应的集合记为 B_i，那么联言判断就是说，A 包含于它们的交集，记为：

$$A \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i.$$

或言判断是多个判断的有判断。考虑这样的或言判断：A 也许 b，也许 c。它表达的意思是，A 可能包含于性质 b 对应的集合 B，也可能包含于性质 c 对应的集合 C。A 的元素至少在 B、C 中的一个里。换句话说，A 是 B、C 的并集的子集。

一般来说，考虑关于概念 A 的或言判断，它表达的是 A 包含于多个性质对应的集合的并集。如果把这些性质的集合记为 I，把每个性质对应的集合记为 B_i，那么或言判断就是说，A 包含于它们的交集，记为：

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i.$$



右图中，每个圈代表一个分支判断对应的集合。联言判断对应着所有圈交叠的区域（颜色最深的部分），而或言判断对应着所有蓝色的区域的总和。

思考 3.3.1. 有个理发师，坚持只给那些不给自己理发的人理发。那么，他是否该给自己理发呢？

习题 3.3.1.

1. 用代数的方法，表示乘法对加法的分配律。

2. 用代数的方法，表示乘方的运算法则。

3. 考虑假言判断：如果 A 是 b，那么 A 是 c。设性质 b、c 对应的集合是 B、C，集合 A、B、C 之间有什么关系？

4. 从集合的角度，解释这句话："如果全部 A 都是 b，那么有些 A 是 b"。

3.4 映射

我们用**映射**表示事物之间的对应关系。把一个事物对应到另一个事物，可以理解为事物的变换或对事物进行操作。因此映射也叫做**变换**或**操作**。把数量对应到数量的映射，叫做**函数**。

例子 3.4.1.

1. 把现有《道德经》各个版本和它的字数对应起来，就是一个映射：

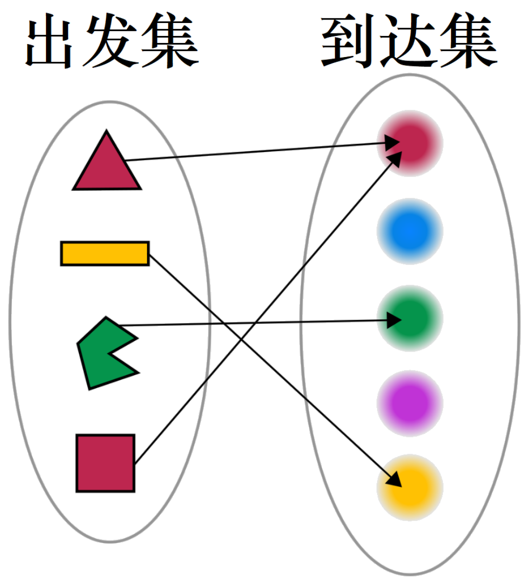
王弼《老子道德经注》（通行本）	$\longrightarrow$	5162字
河上公《道德经章句》	$\longrightarrow$	5201字
傅奕《道德经古本》	$\longrightarrow$	5450字
马王堆帛书甲本	$\longrightarrow$	5344字
马王堆帛书乙本	$\longrightarrow$	5342字
郭店楚墓本	$\longrightarrow$	2046字

2. 把事物对应到自己的映射叫做**恒等映射**或**等映射**。比如，把每个自然数对应到自己的映射就叫自然数集上的恒等映射，也叫恒等函数。任何非空集合上都有恒等映射。恒等映射的定义域和值域相同。

3. 把事物对应到同一个对象的映射叫做**恒映射**或**常映射**。比如，把任意自然数对应到 0 的映射就是恒映射。

我们把映射涉及的事物用两个集合记录：**出发集**和**到达集**。映射把出发集的一个元素对应到到达集的一个元素。用变量 x 指代出发集的元素，x 的取值在出发集里变化时，映射对应的元素也在到达集里变化，可以用变量 y 表示。一般称 x 为**自变量**，y 为**应变量**。出发集和到达集都是数集的时候，映射就叫做函数。

需要强调的是，映射可以把多个元素对应到同一个元素，但不会把一个元素对应到多个元素。



映射把图形对应到它的颜色

如果把映射记作 f，那么可以用 $y=f(x)$ 或 $f:x\mapsto y$ 表达“映射把出发集的元素和到达集的元素对应起来”这件事。对出发集的元素 x 来说，如果映射 f 把它和到达集的元素 y 对应起来，就说 y 是 x（经过 f 映射）的**值**，记作 $f(x)=y$。

出发集中，某个映射涉及的元素集合称为映射的**定义域**；到达集里，某个映射涉及的元素集合则称为映射的**值域**。定义域是出发集的子集，值域是到达集的子集。

举例来说，映射 f 的定义域是 $\{1,2,3,4,5\}$，它把 $1,2,3,4,5$ 分别对应到 $6,7,8,7,6$。那么它的值域是 $\{6,7,8\}$。具体来说，$f(2)=7$，$f(3)=8$。

每个一元式都可以用来定义映射。比如，设定定义域是自然数集 $\mathbb{N}$ 后，代数式 $4-0.3x+9x^2+\frac{(1-x+2.69x^4)}{0.5x-1.385}$ 就可以定义映射：

$$\forall x\in\mathbb{N},\quad x\mapsto 4-0.3x+9x^2+\frac{(1-x+2.69x^4)}{0.5x-1.385}.$$

如果把定义域设成另一个集合，比如 $\{1,2,3\}$ 或全体偶数，就定义了另一个映射。

我们知道，每个概念都对应某种集合。如果我们把这个集合作为定义域或者出发集，那么，确定了定义域后，每个含有变量的简单性质判断就可以定义一个映射。

比如，考虑这样一个命题："$\{1,2,5,6\}$ 中的任何数 n 都能被 5 整除"。我们可以看到，定义域是 $\{1,2,5,6\}$，而"n 能被 5 整除"就可以定义以下的映射：

$$\forall n\in\{1,2,5,6\},\quad n\mapsto n\text{能被}5\text{整除。}$$

这个映射从简单判断的主语出发。主语的概念对应集合 $\{1,2,5,6\}$。

对集合中每个单独的元素 n，"n 能被 5 整除"这个判断要么是真的，要么是假的。因此，如何我们考虑集合 $\{$真,假$\}$，那么这个集合就是上面的映射的到达集，因为对每个 n 来说，"n 能被 5 整除"这个判断要么是真的，要么是假的。而它的值域就是集合 $\{$真,假$\}$ 的子集。

"真"、"假"就是命题的真值，所以我们一般把这个集合称为**真值集**或者**二元集**。很多时候，我们也会用 0 表示"假"，1 表示"真"[①]。

思考 3.4.1.

1. 全判断 $\forall x\in A,\ P(x)$ 和映射 $x\mapsto P(x)$ 之间存在什么关系?

[①]也有的时候会反过来。

习题 3.4.1.

1. 映射 f 的定义域是 $\{1,2,3\}$，值域是 $\{4,5\}$。

1.1. 写出一个满足条件的映射 f。

1.2. 你能写出几个满足条件的映射 f?

2. 判断以下说法是否正确。

2.1. 到达集中的元素，总是映射的结果。

2.2. 出发集中的元素经过映射的值，总在映射的值域中。

第四章　有理数的运算

我们已经学过自然数和分数的运算。两个自然数可以做加法、减法和乘法，任两个分数可以做加法、减法、乘法和（不为零的）除法。把自然数、分数扩展到有理数后，两个有理数可以做加法、减法、乘法和不为零的除法。

有理数的运算和自然数、分数相比，多了与负数有关的运算。为了讨论方便，我们首先介绍一个表示负数的方法：每个负数都能表示成 $-a$ 的形式，其中 a 是它的相反数，是一个正数。

4.1　有理数的加减法

我们先来看与负数有关的加减法。按照负数的定义，任何负数 $-a = 0 - a$。所以，一个数加上一个负数，就等于减去它的相反数：

$$b + (-a) = b + (0 - a) = (b + 0) - a = b - a.$$

换句话说，减去一个正数，就等于加上它的相反数。另一方面：

$$b - (-a) = b + a - a - (-a) = b + a + (-a) - (-a) = b + a.$$

换句话说，减去一个负数，也等于加上它的相反数。

两者可以用同一句话描述：**减去一个数，等于加上它的相反数**。

减法化加法

$$b - a = b + (-a)$$

换成相反数

于是，有理数的减法总可以转化为有理数的加法。

例子 4.1.1. 1. 计算：

$$\begin{array}{llll} (1). & 3.4-(-2.1) & (2). & 2.8-(-5) \\ (3). & 9.1-(-4.6) & (4). & 1.2-(-4.4) \end{array}$$

2. 把以下减法改为加法：

$$\begin{array}{llll} (1). & 3.4-2.1 & (2). & 2.8-5 \\ (3). & -9.1-(-4.6) & (4). & -1.2-(-4.4) \end{array}$$

解答.

1.

(1). $3.4-(-2.1)=3.4+2.1=5.5$

(2). $2.8-(-5)=2.8+5=7.8$

(3). $9.1-(-4.6)=9.1+4.6=13.7$

(4). $1.2-(-4.4)=1.2+4.4=5.6$

2.

(1). $3.4-2.1=3.4+(-2.1)$

(2). $2.8-5=2.8+(-5)$

(3). $-9.1-(-4.6)=-9.1+4.6$

(4). $-1.2-(-4.4)=-1.2+4.4$

再来看两个有理数的加法。我们要计算：

$$a+b$$

如果两者都是正数，就是我们熟悉的分数加法。

如果两者都是负数，那么 $-a$、$-b$ 都是正数：

$$0 = 0 + 0 = (a + (-a)) + (b + (-b)) = a + b + ((-a) + (-b)).$$

因此，和是 $(-a) + (-b)$ 的相反数。

如果 a、b 一正一负，不妨设 a 正 b 负[①]，于是 $-b$ 是正数。

$$a + b = a - (-b)$$

式子中 a 和 $-b$ 都是正数。如果 $a > -b$，那么 $a - (-b)$ 是正数。如果 $a < (-b)$，那么 $a - (-b)$ 是负数。而由于：

$$0 = 0 + 0 = a - a + (-b) - (-b) = (a - (-b)) + ((-b) - a),$$

因此 $a - (-b)$ 和 $(-b) - a$ 互为相反数。也就是说，$a + b$ 是正数 $(-b) - a$ 的相反数。

看得出，上面讨论中 a 和 $-b$ 的大小关系很重要。为了方便总结，我们引进**绝对值**的概念：

定义 4.1.1. 正数的**绝对值**是它自身，负数的绝对值是它的相反数。0 的绝对值是 0。

按照这个定义，可以把前面讨论的结果简化：

如果两个有理数同为正数（负数），那么它们的和也是正数（负数），绝对值是它们绝对值的和。如果两个有理数一正一负，那么它们的和的正负与绝对值较大者的正负一致，和的绝对值是绝对值较大者减去绝对值较小者的差。

总结两个有理数的加减法：

[①]如果 a 负 b 正，根据加法交换律，可以转化成 a 正 b 负的情形。

1. 将减法转为加法。
2. 任何数与 0 相加都得到自身。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的和，加上对应的正负号。
5. 如果两个数一正一负，用较大的绝对值减去较小的绝对值，加上绝对值较大的数的正负号。

例子 4.1.2. 计算:

$$
\begin{array}{lll}
(1).\quad 3.4-(-2.1) & (2).\quad 2.8-5 & (3).\quad -7+2.3 \\
(4).\quad -9.1+(-4.6) & (5).\quad -1.2+4.4 & (6).\quad -0.9-3.4
\end{array}
$$

解答.

$$
\begin{aligned}
&(1).\quad 3.4-(-2.1)=3.4+2.1=5.5\\
&(2).\quad 2.8-5=2.8+(-5)=-(5-2.8)=-2.2\\
&(3).\quad -7+2.3=-(7-2.3)=-4.7\\
&(4).\quad -9.1+(-4.6)=-(9.1+4.6)=-13.7\\
&(5).\quad -1.2+4.4=4.4-1.2=3.2\\
&(6).\quad -0.9-3.4=-0.9+(-3.4)=-(0.9+3.4)=-4.3
\end{aligned}
$$

习题 4.1.1. 算一算:

1. $2.56-(-1.9)$，$(-4)+3.29$，$10.8+(-42.15)$.

2. $-59.76+40.3$，$-2.8-6.6$，$-5.09-(-2.9)$.

3. $-1.76-(-5.21)-1.874, 3.202-(-1.94)-1.57, 2+(-9.18)-(20.354)$.

4. $3-2-(-8)+(-2.2)$，$-8.1-((-1.6)-1.96+(-3.9+1.203))$.

4.2 有理数的乘除法

讨论有理数的乘除法，可以从最简单的情况开始：$(-1)\times 1$ 和 $(-1)\times(-1)$。按照定义，

$$0=0\times 1=(-1+1)\times 1=(-1)\times 1+1\times 1=(-1)\times 1+1.$$

于是

$$(-1) \times 1 = 0 - 1 = -1.$$

同理，$(-1) \times 0 = 0$。根据乘法交换律，$1 \times (-1) = -1$，$0 \times (-1) = 0$。

最后：

$$\begin{aligned} 0 = 0 \times (-1) &= (-1+1) \times (-1) \\ &= (-1) \times (-1) + 1 \times (-1) \\ &= (-1) \times (-1) - 1. \end{aligned}$$

于是 $(-1) \times (-1) = 1$.

所以，-1 的乘法性质可以归纳为“负零得零，负正得负，负负得正”。

同理，把乘数换成一般的数，也有：

$$(-1) \times a = 0 - a = -a, \quad (-1) \times (-a) = 0 - (-1) \times a = a.$$

也就是说，一个数乘以 -1，总得到它的相反数。

从绝对值的角度来看，任何正数都等于它的绝对值，任何负数都等于它的绝对值乘以 -1。换句话说，在乘法中，任何有理数都可以分成两部分考虑：绝对值和正负号。

因此，两个有理数 a、b 相乘，可以分别把两部分相乘。比如：

$$(-3.3) \times 6 = (-1) \times 3.3 \times (+1) \times 6 = ((-1) \times (+1)) \times (3.3 \times 6).$$

其中 3.3、6 分别是乘数和被乘数的绝对值，-1 和 $+1$ 是它们的正负号。

两个有理数的乘积，是两者绝对值的乘积，乘以两者正负号的乘积。绝对值的乘积总是正数，正负号的乘积总是 ± 1。因此，两个有理数的乘积，绝对值是两者绝对值的乘积，正负号是两者正负号的乘积。具体来说，看 -1 的个数，就可以确定乘积的正负了。如果正负号都是正数，那么不需要

考虑 -1 的问题。如果两者一正一负，那么乘积是负数，如果正负号都是负数，“负负得正”，于是乘积是正数。

如果乘数或被乘数是 0，结果是 0。

除法是乘法的逆运算。除以一个正有理数 a，等于乘以它的倒数：$\frac{1}{a}$。我们只需要把涉及负数的除法也转为乘法即可。

除数是负有理数 $-a$ 的时候，我们首先找到 $b \div (-a)$ 的商，也就是使得 $c \times (-a) = b$ 的数 c。根据前面对乘法的推导，

$$b \times (-1) \times \frac{1}{a} = c \times (-a) \times (-1) \times \frac{1}{a} = c \times a \times \frac{1}{a} = c$$

或者说

$$c = b \times \left((-1) \times \frac{1}{a} \right) = b \times \left(-\frac{1}{a} \right).$$

即

$$b \div (-a) = b \times \left(-\frac{1}{a} \right).$$

最后，我们说明 $-\frac{1}{a}$ 是 $-a$ 的倒数：

$$\begin{aligned}(-a) \times \left(-\frac{1}{a} \right) &= a \times (-1) \times (-1) \times \frac{1}{a} \\ &= (-1) \times (-1) \times a \times \frac{1}{a} \\ &= 1 \times 1 = 1.\end{aligned}$$

所以，无论除数是正有理数还是负有理数，**除以一个数，等于乘以它的倒数**。

除法化乘法

$$b \div a = b \times \frac{1}{a}$$

换成倒数

于是，有理数的除法总可以转化为有理数的乘法。

综上所述，可以这样总结有理数的乘除法：

1. 将除法转为乘法。
2. 任何数与 0 相乘都得到 0。
3. 计算两个数的绝对值。
4. 如果两个数同正负，取绝对值的乘积。
5. 如果两个数一正一负，取绝对值乘积的相反数。

例子 4.2.1. 计算：

(1).	$3.3 \times (-5)$	(2).	$-\frac{3}{7} \times (-\frac{5}{6})$	(3).	$(-2.4) \times \frac{1}{6}$
(4).	$4.8 \div (-1.6)$	(5).	$-\frac{3}{7} \div (-\frac{5}{14})$	(6).	$(-2.8) \div \frac{2}{3}$

解答.

(1). $3.3 \times (-5) = -(3.3 \times 5) = -16.5$

(2). $-\frac{3}{7} \times (-\frac{5}{6}) = \frac{3}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{14}$

(3). $(-2.4) \times \frac{1}{6} = -(2.4 \times \frac{1}{6}) = -0.4$

(4). $4.8 \div (-1.6) = 4.8 \times (-\frac{5}{8}) = -(4.8 \times \frac{5}{8}) = -3$

(5). $-\frac{3}{7} \div (-\frac{5}{14}) = -\frac{3}{7} \times (-\frac{14}{5}) = \frac{3}{7} \times \frac{14}{5} = 1.2$

(6). $(-2.8) \div \frac{2}{3} = (-2.8) \times \frac{3}{2} = -(2.8 \times \frac{3}{2}) = -4.2$

习题 4.2.1.

算一算：

$4.51 \times (-2.2)$，$(-1.2) \times (-3.9)$，$(-1.8) \times 0.8$.

$1.98 \div (-0.3)$，$-2.8 \div (-0.7)$，$5.2 \div (3 \div (-1.5))$, $(-3) \div (0.5 \times (-2.4))$.

思考：

1. 为什么“任何数与 0 相加都得到自身”？

2. 为什么“任何数与 0 相乘都得到 0”？

3. 为什么说“涉及负数的乘法也满足交换律和分配律”？

4.3　数轴

为了直观表示有理数，我们引入**数轴**的概念。

从左往右画一条直线，在直线上取一点表示 0，称为**原点**。选择适当长度作为**单位长度**，规定右边是**正方向**，往右移动一个单位长度就是“+1”。

从原点出发往右移动，每移动一个单位长度就是“+1”。因此，每隔单位长度取一个点，就可以表示出 $1, 2, 3 \cdots$。相对的，往左移动一个单位长度就是“-1”，类似可以表示出 $-1, -2, -3 \cdots$。这就是数轴。

数轴可以用来做加减法。比如，计算 $3+2$，可以先在数轴上找到 3，然后向右移动 2 个单位长度，到达 5 对应的点，这说明 $3+2=5$。

数轴上的点，越往右就越大，越往左就越小。正数都在 0 右边，负数都在 0 左边。比较两个数的大小，可以在数轴上找对应的点：靠右的比较大，靠左的比较小。

思考 4.3.1.

1. 数轴的用法和有理数的运算法则是否有矛盾?
2. 所有的有理数都在数轴上吗？怎么在数轴上找到一个有理数?

第五章　代数式的运算

代数式是含有变量的算式。代数式的运算和数式并没有区别。毕竟，代数式里的变量只是用来代替数的。对代数式做运算，使用和数式运算一样的规则：加法结合律、乘法结合律、加法交换律、乘法交换律，以及乘法对加法的分配律。

5.1　整式的运算

与整式有关的计算，一个常见的目标是把式子**展开**，也就是把几个整式的乘积转成一个整式：单项式或多项式。展开整式，可以按照以下步骤操作：

- 用分配律把整式乘积转为整式中各项的乘积之和。
- 合并同类项（用到结合律和交换律）。

例子 5.1.1. 计算：

1. 展开并化简 $(a+b)(a-b)$

解:

$$\begin{aligned}
(a+b)(a-b) &= a\cdot(a-b)+b\cdot(a-b) && \text{(分配律展开)}\\
&= a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b\\
&= a^2+(-1+1)ab-b^2 && \text{(合并同类项)}\\
&= a^2+0ab-b^2\\
&= a^2-b^2
\end{aligned}$$

2. 展开并化简 $(a^2+ab-b^2)(a-b)$

解:

$$\begin{aligned}
&(a^2+ab-b^2)(a-b)\\
&= a^2\cdot(a-b)+ab\cdot(a-b)+(-b^2)\cdot(a-b) && \text{(分配律展开)}\\
&= a^2\cdot a-a^2\cdot b+ab\cdot a-ab\cdot b+(-b^2)\cdot a+(-b^2)\cdot(-b)\\
&= a^2\cdot a-a^2\cdot b+a^2b-ab^2-b^2\cdot a+b^2\cdot b\\
&= a^3+(-1+1)a^2b+(-1-1)ab^2+b^3 && \text{(合并同类项)}\\
&= a^3+0a^2b-2ab^2+b^3\\
&= a^3-2ab^2+b^3
\end{aligned}$$

在第一个例子中，我们首先把 $a-b$ 看成一个整体，把 $a+b$ 看成两项相加。使用分配律，就把 $(a+b)(a-b)$ 转为 $a\cdot(a-b)$ 与 $b\cdot(a-b)$ 的和。接下来，我们把 $a-b$ 看成两项相减，再次使用分配律，就把 $(a+b)(a-b)$ 完全转成若干项的和:

$$a\cdot a-a\cdot b+b\cdot a-b\cdot b$$

接着，我们合并同类项。使用交换律，可以知道 $ab=ba$，所以这两项是同类项，可以合并。合并后，系数是 $-1+1=0$，所以这 ab 项被消去了。剩下的两项无法合并同类项了。于是我们最后得到:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

第二个例子中的计算步骤也是如此。需要注意的是，展开 $(-b^2)\cdot(a-b)$ 这样带有多个减号（负号）的式子时，要仔细处理正负号。为了防止出错，可以先将容易出错的减法转为加法。比如，计算 $ab-b(a-c)$ 时，可以把它化为：$ab+(-b)\cdot(a+(-c))$。使用分配律展开各项之后，再用“负正得负，负负得正”的法则，消去负号，化简各项。比如，展开 $ab-b(a-c)$：

$$\begin{aligned} ab-b(a-c) &= ab+(-b)\cdot(a+(-c)) && \text{(减法化加法)} \\ &= ab+(-b)\cdot a+(-b)\cdot(-c) && \text{(分配律展开)} \\ &= ab-ba+bc && \text{(消去负号)} \\ &= bc. \end{aligned}$$

另一种常见的代数式计算叫做**变量代换**。我们知道，变量是用来代替数的。其实，变量也可以用来代替变量。用变量代替变量，可以变化代数式的形式，很多时候，可以帮助我们更好地理解事物间的关系。

举例来说，我们想展开 $(a-2b+1)(a-2b-1)$，除了像上面的例子一样直接使用分配律然后合并同类项，还有什么别的方法吗?

我们可以观察到，这个式子是两个整式的乘积，第一个是 $a-2b$ 与 1 的和，第二个是 $a-2b$ 与 1 的差。于是，我们可以把 $a-2b$ 看成一个整体，把 1 看成一个整体。我们用变量 x 代替 $a-2b$，y 代替 1，那么原式就变成了 $(x+y)(x-y)$，于是等于 x^2-y^2。

我们再把 x 和 y 代替的变量和数代回去，就得到原式等于 $(a-2b)^2-1^2$。$1^2=1$，所以我们现在只需要展开 $(a-2b)^2$ 了。展开 $(a-2b)^2$：

$$\begin{aligned} (a-2b)^2 &= (a-2b)(a-2b) \\ &= (a-2b)\cdot a-(a-2b)\cdot 2b \\ &= a^2-2b\cdot a-a\cdot 2b+2b\cdot 2b \\ &= a^2+(-2-2)ab+4b^2 \\ &= a^2-4ab+4b^2 \end{aligned}$$

因此，

$$(a-2b+1)(a-2b-1)=(a-2b)^2-1=a^2-4ab+4b^2-1.$$

数学中常用的整式等式：

1. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$
2. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $a^3+b^3=(a^2-ab+b^2)(a+b)$
7. $a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b)$
8. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
9. $(a+b)(a+c)=a(a+b+c)+bc$
10. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$
11. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

习题 5.1.1.

1. 展开并化简：

1.1. $(4a+2b-1)(a-3b+1)$.

1.2. $(a+b^2-b-2a^2)(a^2-2b^2+a+b)$.

2. 验证以下等式：

2.1. $(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$.

2.2. $a^4+a^2+1=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.

2.3. $3(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

3. 求以下代数式中 x^3 的系数：

3.1. $(x-2)^5$.

3.2. $(x^2-x+1)(x^3-x^2+2x-1)$.

5.2 分式的运算

和分数一样，分式运算常见的目的有**约分**和**通分**。约分是把分子和分母中共有的式子消去，让分式更简洁。无法继续约分的分式叫做既约分式。通分是让几个分式的分母相同，以便相加。约分和通分的方法和分数相同。

例子 5.2.1. 通分:

1. $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}$

解:

$$\begin{aligned}\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}&=\frac{(b+c)bc+(a+c)ac+(a+b)ab}{abc}\\&=\frac{a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2}{abc}\end{aligned}$$

2. $\frac{a+2b}{a+b-1}-\frac{a+b+1}{a-b+1}$

解:

$$\begin{aligned}\frac{a+2b}{a+b-1}-\frac{a+b+1}{a-b+1}&=\frac{(a+2b)(a-b+1)-(a+b+1)(a+b-1)}{(a+b-1)(a-b+1)}\\&=\frac{a^2-ab+a+2ab-2b^2+2b-(a^2+2ab+b^2-1)}{(a+b-1)(a-b+1)}\\&=\frac{-ab-3b^2+a+2b+1}{(a+b-1)(a-b+1)}\end{aligned}$$

习题 5.2.1.

1. 通分:

1.2. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{2a-b}$.

1.2. $\frac{a^2}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}$.

1.1. $\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{c-a}{a+b-c}$.

2. 验证以下等式:

2.1. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\frac{2a}{a^2-b^2}$.

2.2. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

3. 求以下代数式中 x 的系数:

3.1. $(x^2 - \frac{1}{x})^5$.

3.2. $(x - x^2 - \frac{1}{x} + 1)(x^2 + x + 3 - \frac{2}{x})$.

第六章　从变量到方程（下）

6.1　一元一次方程

例子 6.1.1. 根据以下问题，设未知数并列出方程:
(1). 用一条 50 厘米长的丝带给一个正方形的盒子包装，捆好一周后，还有 26 厘米可以用于打结。盒子的边长是多少?
(2). 把一箱书分给某组学生阅读。如果每人分 3 本，则剩余 20 本；如果每人分 4 本，则还差 16 本。这个班有多少学生?

解答.
(1) 解：设盒子的边长是 x 厘米，列方程:

$$4x + 26 = 50.$$

(2) 解：设这个班有 x 个学生，列方程:

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

以上的方程都有这样的性质：恰好含有一个变量来表示未知数，而且含有变量的项都是一次项。这样的方程叫做**一元一次方程**。一元一次方程是由关于未知数的一元一次式构成的方程，它的一般形式是：$ax + b = cx + d$。其中变量 x 是方程的未知数，a, b, c, d 称为方程的系数。实际的问题中，系数 a, b, c, d 是已知数，根据等式的基本性质，我们可以求出未知数 x 的值。

首先，我们把含有变量 x 的项移到等式一边，把常数项移到等式另一边。利用等式的基本性质，我们将等式两边同时减去 b，再同时减去 cx，得到 $ax-cx=d-b$。

ax 和 cx 都是只含有 x 的一次项，它们之间只差一个系数，所以可以合并同类项：$ax-cx=(a-c)x$。

如果 $a\neq c$，那么可以把等式两边同除以 $a-c$，得到 $x=\frac{d-b}{a-c}$。这就是方程的解。

如果 $a=c$，那么我们得到 $0=d-b$。如果 $b\neq d$，那么这个等式总是不成立的。任何 x 的值都不能使等式成立。我们说方程无解。如果 $b=d$，那么我们得到 $0=0$。这个等式总是成立的。任何 x 的值都能使等式成立。我们说方程有任意解。

使方程的等式成立的值是一个集合，称为它的**解集**。我们把上面的说法用集合的说法再表述一次：方程无解，就是说方程的解集是空集。方程有任意解，就是说方程的解集是全集。方程有唯一解 $x=\frac{d-b}{a-c}$，就是说方程的解集就是 $\{\frac{d-b}{a-c}\}$。

解答. 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的方程：
(1) 解：设盒子的边长是 x 厘米，列方程：

$$4x+26=50.$$

等式右边没有含变量的项，我们将等式两边同时减去 26，得到：

$$4x=50-26.$$

即：

$$4x=24.$$

再将等式两边同时除以 4，就得到解：$x=6$。
答：盒子的边长是 6 厘米。

(2) 解：设这个班有 x 个学生，列方程：

$$3x + 20 = 4x - 16.$$

将等式两边同时减去 20，再将等式两边同时减去 $4x$，得到：

$$3x - 4x = -20 - 16.$$

左边合并同类项，右边计算减法，就得到：

$$-x = -36.$$

再将等式两边同时除以 -1，就得到解：$x = 36$。
答：这个班有 36 个学生。

我们可以这样总结一元一次方程 $ax + b = cx + d$ 的解：

$$\boxed{\begin{cases} a \neq c & \text{有唯一解：} \frac{d-b}{a-c} \\ a = c & \begin{cases} b \neq d & \text{无解} \\ b = d & \text{有任意解} \end{cases} \end{cases}}$$

思考 6.1.1. 以下方程如何求解？

$$\frac{ax+b}{cx+d} = 1$$

它的解有哪些情况？试和一元一次方程对比。

6.2 一元一次不等式

例子 6.2.1. 根据以下问题，设未知数并列出不等式：
(1). 海水的盐度是 0.351%，生理盐水的盐度是 0.9%，一千克海水中至少要

加入多少克纯水，才能让盐度降到生理盐水的盐度以下?
(2). 100 亩地规划种植葡萄。食用葡萄每亩年收益为 0.4 万元，酿酒葡萄每亩年收益为 0.6 万元。规划年收益 52 万元。要如何安排种植?

解答.
(1) 解：设要加 x 克水，题目条件可以写成：

$$\frac{1000 \times 0.351\%}{1000 + x} < 0.9\%.$$

由题目条件，可以假设 $1000 + x$ 是正数，两边乘以左式分母，得到：

$$1000 \times 0.351\% < 0.9\% \times (1000 + x).$$

(2) 解：设 x 亩地种食用葡萄，那么 $100 - x$ 亩地种酿酒葡萄，题目条件可以写成：

$$0.4 \times x + 0.6 \times (100 - x) \geqslant 52.$$

一元一次不等式和一元一次方程很像，也涉及关于变量的一元一次式。一元一次方程中，两个一元一次式有相等关系，一元一次不等式中，两个一元一次式有不等关系。区别在于，相等关系只有一种，而不等关系有两类四种。

不等式的基本性质和等式有什么共同点，又有什么区别呢?

例子 6.2.2. 观察以下不等式，你能发现什么规律?
(1). $2 < 3, \quad 3 < 4, \quad 6 < 7$
(2). $4 \leqslant 7, \quad 6 \leqslant 10.5, \quad 1.2 \leqslant 2.1, \quad 28 \leqslant 49$
(3). $3 < 5, \quad 9 < 15, \quad -6 > -10, \quad -0.36 > -0.6$
(4). $-7 \leqslant 1, \quad 7 \geqslant -1, \quad -1.4 \leqslant 0.2, \quad 1.19 \geqslant -0.17$

等式的基本性质是：等式两边加、减、乘、除以同一个量，成立的等式仍然成立。

不等式两边加减同一个量，成立的不等式仍然成立。不等式两边乘以或除以同一个量，成立的不等式不一定成立。

我们观察到，只有当不等式两边同时乘以或除以正数的时候，不等式仍然成立；不等式两边同时乘以或除以负数的时候，不等式不再成立，反号的不等式反而成立。

为什么乘除法和加减法有这样的区别呢？我们可以看以下的例子：

例子 6.2.3. 观察以下的式子，不等关系之间有什么联系？

(1). $2 < 3, \quad 3 > 2, \quad -2 > -3, \quad -3 < -2$

(2). $4 \leqslant 7, \quad 7 \geqslant 4, \quad -7 \leqslant -4, \quad -4 \geqslant -7$

一般来说，两个数 a, b 的不等关系是**互反**的：如果 $a < b$，那么 $b > a$，反之亦然；如果 $a \leqslant b$，那么 $b \geqslant a$，反之亦然。左右边互换的时候，不等号要反过来。而两个数的相等关系是**对称**的：如果 $a = b$，那么 $b = a$。左右边互换的时候，等号仍然是等号。

从 $2 < 3$ 到 $-2 > -3$，可以理解为两边同时乘以 -1；也可以理解为两边同时减去 2，再同时减去 3，然后左右边互换。左右边互换时，不等式反号。如果两个数相等，那么左右边互换时不需要反号，或者说，等号的反号仍然是等号（因此说相等关系是自反的）。

追根究底，不等关系反映了数与数之间的顺序，相等关系反映了数与数之间有共同之处。它们代表了数的不同性质。

一元一次不等式的解法，思路和一元一次方程类似。我们都希望把一次项整理到不等式一边，把常数项整理到不等式另一边，然后合并同类项，最后两边同时除以变量 x 的系数，求出 x 的解。

因此，在处理一元一次不等式的时候，可以有两种方式。要么用加减法使一次项的系数变成正数，然后两边同时除以系数得到解。这个方法不需考虑做除法时不等式反号的问题；要么不要求一次项的系数是正数，两边同时除以一次项系数的时候，视情况决定不等号是否要反号。

解答. 按这个方法，我们可以解以上两个问题中的不等式:

(1) 解：设要加 x 克纯水，题目条件可以写成:

$$\frac{1000\times 0.35\%}{1000+x}<0.9\%.$$

由题目条件，可以假设 $1000+x$ 是正数，两边乘以左式分母，得到:

$$\begin{aligned}1000\times 0.351\% &< 0.9\%\times(1000+x)\\ 3.51 &< 9+0.009x\\ 3.51-0.9 &< 0.009x\\ 2.61 &< 0.009x\end{aligned}$$

两边同时除以正数 0.009，得到:

$$\frac{2.61}{0.009}<x$$

即:

$$x>\frac{2.61}{0.009}=290.$$

此时 $1000+x>1290>0$，符合假设。

答：至少要加 290 克纯水。

(2) 解：设 x 亩地种食用葡萄，那么 $100-x$ 亩地种酿酒葡萄，题目条件可以写成:

$$\begin{aligned}0.4\times x+0.6\times(100-x) &\geqslant 52\\ 0.4x-0.6x+60 &\geqslant 52\\ -0.2x &\geqslant 52-60\\ -0.2x &\geqslant -8\end{aligned}$$

一次项系数 -0.2 是负数，所以两边同时除以 -0.2，不等式反号:

$$x\leqslant\frac{-8}{-0.2}$$

得到 $x \leqslant 40$。由问题条件，x 还需要满足 $0 \leqslant x \leqslant 100$，所以解为：$x \leqslant 40$ 且 $0 \leqslant x \leqslant 100$，也就是 $0 \leqslant x \leqslant 40$.
答：至多 40 亩地种食用葡萄，其余的地种酿酒葡萄。

可以看到，一元一次不等式的解与一元一次方程的解是不一样的。一元一次方程的解总是单元集、全集或空集，一元一次不等式的解一般既不是全集、也不是单元集或空集。

另外要注意的是，在解决实际问题的时候，往往需要根据题目条件做一些额外的假设，才能列出方程或不等式。解完方程、不等式后，应该及时检验得到的解，看是否能让这些假设成立。

综上所述，可以这样总结解一元一次不等式的方法：

方法一：
1. 通过两边同时加减法，将一次项移到不等式一边，将常数项移到另一边，并保证一次项系数不是负数。
2. 如果一次项系数等于 0，比较不等式两边：
2.1. 如果不等式成立，则原不等式有任意解。
2.2. 如果不等式不成立，则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0，将两边同时除以一次项系数，得到不等式的解。

方法二：
1. 通过两边同时加减法，将一次项移到不等式一边，将常数项移到另一边。
2. 如果一次项系数等于 0，比较不等式两边：
2.1. 如果不等式成立，则原不等式有任意解。
2.2. 如果不等式不成立，则原不等式无解。
3. 如果一次项系数大于 0，将两边同时除以一次项系数，得到不等式的解。
4. 如果一次项系数小于 0，将两边同时除以一次项系数，并将不等式反号，得到不等式的解。

思考 6.2.1. 以下不等式如何求解?

$$\frac{ax+b}{cx+d} < 1$$

它的解和一元一次不等式有什么不同?